ÜBER DAS RANGPROBLEM BEI KÖRPERERWEITERUNGEN

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Sigurd Elliger

aus Heidelberg

1965

Druck:

ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e.V.

DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE

1 Berlin 33, Garystr. 45

ÜBER DAS RANGPROBLEM BEI KÖRPERERWEITERUNGEN

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

vorgelegt von

Sigurd Elliger

aus Heidelberg

1. Referent: Professor Dr. K. P. Grotemeyer
2. Referent: Professor Dr. A. Stöhr

Tag der Promotion: 27. Feb. 1965

Inhalt

I. Problemstellung und Ergebnis; Bezeichnungen

II. Doppelmoduln

III. Topologisierung von Moduln und Ringen von linearen Transformationen

IV. Ranggleichungen

V. Antiisomorphismen des Zwischenkörperverbandes einer Körpererweiterung

VI. Quasigaloissche Körpererweiterungen

VII. Isomorphe Einbettungen

VIII. Anwendungen und Beispiele

I. Problemstellung und Ergebnis; Bezeichnungen

Mit den Begriffen Vektorraum und Körper [1] ist das folgende Problem gegeben: In welcher Weise hängen Links- und Rechtsrang eines Körpers über einem Teilkörper voneinander ab? Diese Frage ist bis heute unbeantwortet. Das Problem hat, jenachdem zwei, einer oder keiner der beiden Ränge endlich sind, einen verschiedenen Charakter. Bisher ist keine der drei Fragen beantwortet: Gilt Ranggleichheit, wenn beide Ränge endlich sind? Folgt aus der Endlichkeit des Linksranges die des Rechtsranges? Können Links- und Rechtsrang verschiedene unendliche Kardinalzahlen sein? Allerdings gibt es einfache Beispiele von Ringen, die über einem Teilkörper rechts und links verschiedene Ränge haben. ([1], Kap. VII) [2]. Daß sogar im Falle der Körpererweiterung die Ränge nicht gleich sind, ist durch eine Arbeit von P.M. Cohn erwiesen, der in [5] eine Körpererweiterung vom Linksrang zwei und vom Rechtsrang größer als zwei konstruiert. Bekannt sind hinreichende Bedingungen für die Ranggleichheit: Ist der Linksrang $(K:L)_l$ eines Körpers K über einem Teilkörper L endlich und der Links-(gleich Rechts-)Rang (K:Z) von K über dem Zentrum Z von K endlich, dann gilt $(K:L)_l = (K:L)_r$. Oder: Ist K von endlichem Linksrang über einem kommutativen Körper L, dann ist $(K:L)_l = (K:L)_r$. Eine weitere wesentliche Klasse von Körpererweiterungen, bei denen Ranggleichheit herrscht, sind die galoisschen. Darunter versteht man Erweiterungen K über einem Fixkörper L einer Gruppe von (Körper-) Automorphismen von K. Ist $(K:L)_l$ endlich und K über L eine galoissche Erweiterung, dann ist $(K:L)_l = (K:L)_r$. Offen ist die Frage, ob ein Zwischenkörper E einer galoisschen Erweiterung K über L, d.h. $L \subseteq E \subseteq K$, gleichen Links- wie Rechtsrang hat. Man weiß nur, daß im Falle $(E:L)_r$ endlich und $(E:L)_l$ endlich $(E:L)_l = (E:L)_r$ gilt. Darüber hinaus haben T. Nagahara und H. Tominaga in [4] gezeigt: Ist K links lokal endlich über dem Fixkörper H der inneren Automorphismen von K über L und $(E:L)_l$ endlich, so ist $(E:L)_r$ endlich. Dabei heißt eine Erweiterung K über H links lokal endlich, wenn zu je endlich vielen Ele-

menten $x_1, \ldots, x_n$ aus K ein Körper H $\subseteq$ M existiert, der die Elemente $x_1, \ldots, x_n$ enthält und über H endlichen Linksrang besitzt.

Die Untersuchungen dieser Arbeit erfassen eine allgemeinere Klasse von Körpererweiterungen als die galoisschen, die wir versuchsweise quasigaloissch nennen wollen. Zu ihrer Definition gelangt man durch den Begriff des Fixkörpers L einer Menge H von Modulendomorphismen eines Körpers K. Die Menge aller Elemente aus K, deren Linksmultiplikationen mit allen Elementen aus L vertauschbar sind, bilden einen Körper L^l, den Linksfixkörper: $L^l = \{e \in K \mid e_1 h = h e_1 \text{ für alle } h \text{ aus } H\}$. Analog existiert der Rechtsfixkörper L^r von H. Ist $L = L^l = L^r$, so wollen wir sagen, H besitze den Fixkörper L. Eine Körpererweiterung K über L heiße quasigaloissch, wenn L Fixkörper einer Menge von Modulendomorphismen von K ist. Die Menge H läßt sich immer als Halbgruppe oder als Ring voraussetzen. Denn ist L Fixkörper einer Menge H, so ist L auch Fixkörper der durch H erzeugten Halbgruppe oder des durch H erzeugten Ringes. H werde eine Halbgruppe bzw. ein Ring der quasigaloisschen Erweiterung K über L genannt. Beispiele für quasigaloissche Erweiterungen sind alle kommutativen und alle galoisschen Erweiterungen.

Insbesondere werden solche quasigaloisschen Erweiterungen betrachtet, deren Halbgruppe H die Eigenschaft hat, daß der durch H über K_r erzeugte Vektorraum bereits ein Ring ist, d. h. $K_r H \subseteq H K_r$ gilt. Alle galoisschen und alle kommutativen Erweiterungen K über L besitzen eine Halbgruppe mit dieser Eigenschaft. Im ersten Fall ist die Galoisgruppe, im zweiten die multiplikative Halbgruppe des Endomorphismenringes des Vektorraumes K über L eine solche Halbgruppe. Für quasigaloissche Erweiterungen, die dieser Einschränkung unterliegen, können wir die beiden ersten Teile der Rangfrage positiv beantworten: Es gilt $(K:L)_l = (K:L)_r$, wenn man unendliche Kardinalzahlen gleichsetzt (Satz VI, 6). Ohne die Einschränkung, daß HK_r ein Ring ist, läßt sich wenigstens zeigen, daß $(K:L)_l$ höchstens abzählbar unendlich ist, wenn $(K:L)_r$ endlich ist.

Zu einem allgemeineren Ergebnis kommt man, wenn man (modul-) isomorphe Einbettungen in eine quasigaloissche Erweiterung betrachtet.

Als Folgerung ergibt sich, daß jeder Zwischenkörper einer endlichen quasigaloisschen Erweiterung K über L mit der Eigenschaft, daß HK_r Ring ist, gleichen Links- wie Rechtsrang hat (Kap. VII).

Für ihre Anregungen bei der Gestaltung dieser Arbeit möchte ich Herrn Professor Dr. Grotemeyer und Herrn Dr. Jehne meinen Dank aussprechen.

Bezeichnungen: Seien M und N Moduln, R und S Ringe. Es bezeichne ${}_RM$ bzw. M_S den Modul M mit R bzw. S als Links- bzw. Rechtsskalarenbereich, ${}_RM_S$ den (R, S)-Doppelmodul, $\mathrm{Hom}_R({}_RM, {}_RN)$ den Modul der R-Homomorphismen von M in N, $\mathrm{End}_R({}_RM)$ den Ring der R-Endomorphismen von M, Hom(M, N) den Modul der R-Homomorphismen von M in N, wenn R der Ring der ganzen Zahlen ist.

Da in dieser Untersuchung die Körper in Verbindung mit linearen Abbildungen betrachtet werden, ist es zweckmäßig, ihre Elemente selbst als lineare Abbildungen, nämlich als Rechts- oder Linksmultiplikationen aufzufassen. Rechtsmultiplikationen durch Elemente k aus K, K ein Ring, werden mit k_r, Linksmultiplikationen mit k_l bezeichnet. Alle Abbildungen werden rechts vom Element geschrieben. Dann ist K isomorph zu K_r und antiisomorph zu K_l, denn es gilt
$x(k_1k_2)_l = (k_1k_2)x = k_1(k_2x) = k_1(xk_{2l}) = (xk_{2l})k_{1l}$, mit x, k_1, k_2 aus K.
Der Rechtsrang von K über einem Teilkörper L schreibt sich $(K:L)_r = (K_r:L_r)_r$ oder auch $\dim_L({}_LK)$, der Linksrang $(K:L)_l = (K_l:L_l)_r$ bzw. $\dim_L({}_LK)$. Für zwei Teilmengen S, T eines Ringes R bezeichne $V_S(T)$ den Zentralisator von T in S, d. h.

$$V_S(T) = \{ x \in S \mid xt = tx \text{ für alle } t \text{ aus } T \}.$$

Entsprechend ist für einen (K, L)-Doppelmodul ${}_KM_L$ Der Zentralisator erklärt: Ist $L' \subseteq L$ und $M' \subseteq M$, so sei $V_L(M') = \{ x \in L \cap K \mid xm' = m'x \text{ für alle } m' \text{ aus } M' \}$.
Für eine Teilmenge H und einen Teilring K eines Ringes bezeichne HK den K-Modul aller Elemente $\{ \sum h_i k_i \; h_i \in H, \; k_i \in K \}$.

II. Doppelmoduln

Es seien K und E Ringe, $M = {}_KM_E$ sei ein (K, E)-Doppelmodul, der über E frei sei bezüglich der Basis $B = \{b_i \mid i \text{ aus } I\}$. Dann gibt es für jedes Paar (i, j) aus I x I einen Homomorphismus e_{ji} von K in E, so daß für jedes k aus K gilt $kb_i = \sum_{j \in I} b_j(ke_{ji})$, wobei ke_{ji} nur für endlich viele j von Null verschieden ist. Sei $L = V_K(B)$, so ist für jedes l aus L

$\sum_{j \in I} b_j((kl)e_{ji}) = (kl)b_i = (kb_i)l = \sum_{j \in I} b_j(ke_{ji})l$,

also, da $\{b_k\}$ eine Basis ist, $(kl)e_{ji} = (ke_{ji})l$, d. h. $l_r e_{ji} = e_{ji} l_r$. Andererseits ist

$\sum_{j \in I} b_j((lk)e_{ji}) = (lk)b_i = l(kb_i) = l \sum_{j \in I} b_j(ke_{ji}) = \sum_{j \in I} b_j l(ke_{ji})$, also

$(lk)e_{ji} = l(ke_{ji})$, d. h. $l_l e_{ji} = e_{ji} l_l$. Damit ist bewiesen

Hilfssatz II, 1: Es seien K und E Ringe, $M = {}_KM_E$ ein Modul, der über E frei sei bezüglich der Basis B. Sei $L = V_K(B)$ der Zentralisator von B in K. Die durch $kb_i = \sum_{j \in I} b_j(ke_{ji})$ definierten e_{ji} sind zugleich L_l- und L_r-Homomorphismen von K in E.

Definition: Sei $M = M_E$ ein E-Rechtsmodul, $B \subseteq M$ eine Teilmenge von M. Dann verstehen wir unter dem Rang (B:E) von B über E die maximale Kardinalzahl über E linear unabhängiger Elemente aus B.

Wir setzen jetzt voraus, daß E ein Körper ist. Ferner sei M ein (K, E)-Doppelmodul und $B \subseteq M$. Die folgende Überlegung erlaubt es, den Operatorenkörper E bei der Bestimmung des Ranges (B:E) durch einen Teilkörper zu ersetzen. Sei $b_1e_1 + \ldots + b_ne_n = 0$, mit b_i $i = 1, \ldots, n \subseteq B \subseteq M$ und e_i aus E, eine Gleichung kürzester Länge, d. h. n minimal und $e_i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n$; e_1 kann als 1 vorausgesetzt werden. Es gebe ein von Null verschiedenes Element l aus $L = V_K(B)$, dann ist

$$b_1le_1 + \ldots + b_nle_n - (b_1e_1l + \ldots + b_ne_nl) = 0.$$

Das ist wegen $e_1 = 1$ eine kürzere Gleichung, wenn nicht alle $e_il - le_i = 0$ sind, d. h. alle e_i in $V_E(L) = V_EV_K(B)$ liegen. Daraus folgt das

Lemma: Sei E ein Körper, K ein Ring, $M = {}_KM_E$ ein Modul und B eine Teilmenge von M. Dann gilt

$$(B:E) = (B:V_E V_K(B)).$$

Folgerung: Seien K und E Körpererweiterungen über L, und H eine Teilmenge von $\mathrm{Hom}_L({}_LK_L, {}_LE_L)$, dann ist

$$(H:E_r) = (H:V_{E_r}(L_r)).$$

Beweis: H ist eine Teilmenge des (K_r, E_r)-Doppelmoduls $\mathrm{Hom}_L({}_LK, {}_LE)$. Nach dem Lemma ist also $(H:E_r) =$
$= (H:V_{E_r} V_{K_r}(H))$; da $L_r \subseteq V_{K_r}(H)$, ist $V_{E_r} V_{K_r}(H) \subseteq V_{E_r}(L_r)$.

Von besonderer Bedeutung für die galoissche Theorie der Körper ist der Fall, daß H eine Menge von L-(Körper-)Monomorphismen von K in E ist. Denn ist E über L galoissch, K in E enthalten und $\dim_L({}_LK)$ endlich, so läßt sich bekanntlich ([1] Theorem 1 S. 173) $\mathrm{Hom}_L({}_LK, {}_LE)$ über E_r erzeugen durch Einschränkungen auf K von Automorphismen von E. Über den Rang über E_r der L-Monomorphismen von K in E gilt der folgende

Satz II, 2: Seien K und E Körpererweiterungen von L, G die Menge aller L-(Körper-)Monomorphismen von K in E, $\{s_i \mid i \in I\}$ ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen nach der Relation: zwei Monomorphismen sind genau dann äquivalent, wenn sie sich durch Multiplikation von rechts mit einem inneren Automorphismus von E unterscheiden. Dann ist

$$(G:E_r)_r = \sum_{i \in I} (V_E(L):V_E(Ks_i))_r.$$

Beweis: Es sei $s_1 e_{1r} + \ldots + s_n e_{nr} = 0$, $e_1 = 1$, eine Gleichung kürzester Länge. Wir multiplizieren sie von links mit einem Element k_r aus K_r, von rechts mit $(ks_1)_r$ und subtrahieren. Dann ist

$$0 = k_r(s_1 e_{1r} + \ldots + s_n e_{nr}) - (s_1 e_{1r} + \ldots + s_n e_{nr})(ks_1)_r =$$
$$= s_1((ks_1)_r e_{1r} - e_{1r}(ks_1)_r) + \ldots + s_n((ks_n)_r e_{nr} - e_{nr}(ks_1)_r).$$

Das ergibt eine Gleichung kürzerer Länge, wenn nicht

$$(ks_i)_r e_{ir} - e_{ir}(ks_1)_r = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \text{ ; d. h.}$$
$$(ks_i)e_i = e_i(ks_1),\ (ks_i) = e_i(ks_1)e_i^{-1},\ \text{d. h. } s_i = s_1 e_{il} e_{ir}^{-1}.$$

Linear abhängige Monomorphismen liegen also in derselben Äquivalenzklasse nach der im Satz formulierten Relation. Untersuchen wir den Rang über E_r der Monomorphismen einer Äquivalenzklasse, d. h.

$(\{se_{il}e_{ir}^{-1}\}:E_r)_r$ für festes s. Ist $e_{il}e_{ir}^{-1}$ ein L-Automorphismus von E, so heißt das $le_{il}e_{ir}^{-1} = l$ für alle l aus L oder $e_i l e_i^{-1} = l$, $e_i l = le_i$, daher e_i in $V_E(L) = T$. Bezeichne $\bar{e}_{il}$ die Einschränkung von e_{il} auf Ks, dann gilt

$$(\{se_{il}e_{ir}^{-1}\}:E_r)_r = (\{\bar{e}_{il}e_{ir}^{-1}\}:E_r)_r = (\{\bar{e}_{il}\}:E_r)_r =$$

$$= (\bar{T}_l:E_r)_r \quad .$$

Dabei bedeute $\bar{T}_l$ die Einschränkung von T_l auf Ks ; $\bar{T}_l$ läßt sich als Teilmenge des $((Ks)_r, E_r)$-Moduls $\bar{T}_l E_r$ auffassen. Nach dem Lemma folgt dann mit $V = V_E(Ks)$ wegen $(ks)\bar{t}_l v_r = t(ks)v = tv(ks)$ die Beziehung

$$(\bar{T}_l : E_r) = (\bar{T}_l : V_r) = (T : V)_r \quad .$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung 1 : Sei K eine endliche, E eine galoissche Körpererweiterung über L, G die Menge aller L-Monomorphismen von K in E. Sei $|I|$ die Kardinalzahl der Klassen nach der Relation von Satz II, 2. Dann gilt

$$(G : E_r)_r = |I|\,(V_E(L) : V_E(K))_r \quad .$$

Beweis: Es ist zu zeigen, daß $(V_E(L) : V_E(K))_r = (V_E(L) : V_E(Ks_i))_r$ für alle i aus I gilt. Nach [1] Theorem 1 S. 173 lassen sich die s_i als Einschränkungen auf K von L-Automorphismen s_i' von E auffassen. Es werde zunächst gezeigt, daß die Einschränkungen der s_i' auf $T = V_E(L)$ Automorphismen von T sind. Sei t aus T, l aus L und lt = tl, so gilt $l(ts_i') = (ts_i')l$, also $Ts_i' \subseteq T$, analog ist $Ts_i'^{-1} \subseteq T$, also $Ts_i' = T$. Sei nun $t_1, \ldots, t_n$ eine Rechtsbasis von T über $V = V_E(K)$ und t ein Element aus T. Dann gilt $t = t_1v_1 + \ldots + t_nv_n$ mit irgendwelchen v_i aus V. Daraus folgt

$$ts_i' = (t_1s_i')(v_1s_i') + \ldots + (t_ns_i')(v_ns_i'), \text{ d. h.}$$

$t_1s_i', \ldots, t_ns_i'$ ist eine Rechtsbasis von T über Vs_i'.

Es ist noch $V_E(Ks_i) = V_E(K)s_i'$ nachzuweisen. Sei x ein Element aus $V_E(Ks_i)$ und y das Element $xs_i'^{-1}$, also $x = ys_i'$. Für jedes k aus K ist dann $x(ks_i) = (ks_i)x$. Dies ist äquivalent mit $(xs_i'^{-1})k = k(xs_i'^{-1})$ oder $yk = ky$, d. h. y in $V_E(K)$.

Folgerung 2 : Sei K – E eine endliche galoissche Körpererweiterung über L, sei G die Menge aller L-Automorphismen von K und $|I|$ der

Index in G des Normalteilers der inneren Automorphismen, so gilt

$$(G : E_r)_r = |I| \cdot (V_K(L) : V_K(K)) \quad .$$

III. Topologisierung von Moduln und Ringen von linearen Transformationen

Zur begrifflich einfacheren Charakterisierung bestimmter Teilmoduln oder -ringe aus $\mathrm{Hom}_L({}_LM, {}_LN)$ bzw. $\mathrm{End}_L({}_LM)$ für L-Moduln M und N ist es zweckmäßig, in $\mathrm{Hom}_L({}_LM, {}_LN)$ bzw. $\mathrm{End}_L({}_LM)$ eine Topologie einzuführen. Wir betrachten die Menge N^M aller Abbildungen von M in N, d.h. das Produkt $\prod_{i\in M} N_i$, wobei M als Indexmenge fungiert und $N_i = N$ für alle i aus M. Führen wir in N die diskrete Topologie und in $\prod N_i$ die Produkttopologie ein, so ist zu jedem f aus N^M und je endlich vielen x_i aus M, $i = 1, \ldots, n$, die Menge $\{ g\in N^M \mid x_i f = x_i g, i = 1, \ldots, n\}$ offen, und beliebige Vereinigungen solcher Mengen bilden das System offener Mengen in dem topologischen Raum N^M. Die so eingeführte sogenannte Topologie der punktweisen Konvergenz wollen wir nach Jacobson , [1], Kap. II, als die endliche Topologie bezeichnen. In dem folgenden Hilfssatz stellen wir einige einfache topologische Eigenschaften für $\mathrm{Hom}_L({}_LM, {}_LN)$ zusammen. (Für eine ausführlichere Darstellung vergleiche [1], Kap. II, § 3).

Hilfssatz III, 1: Seien ${}_LM, {}_LN$ Vektorräume über L.
Dann gilt:

1) $\mathrm{Hom}_L({}_LM, {}_LN)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von N^M.
2) $\mathrm{Hom}_L({}_LM, {}_LN)$ ist als Unterraum von N^M eine topologische Gruppe.
3) $\mathrm{End}_L({}_LM)$ ist als Unterraum von N^M ein topologischer Ring.
4) Ist $\dim_L({}_LM)$ endlich, so ist $\mathrm{Hom}_L({}_LM, {}_LN)$ diskret.

Wir formulieren jetzt den Dichtheitssatz von Jacobson-Bourbaki für irreduzible Moduln.

Satz III, 2 : Sei A ein Ring von Endomorphismen einer kommutativen Gruppe M, und sei M als A-Modul irreduzibel (d.h. $MA \neq 0$, und, außer 0 und M existiert kein Teilmodul von M), und sei L der Zentralisator von A in End(M). Dann ist A bezüglich der endlichen Topologie dicht in $\mathrm{End}_L({}_LM)$, mit anderen Worten: zu jeder endlichen Menge $x_i, i = 1, \ldots, n$, von Elementen aus M und jedem Endomorphismus e aus

$End_L({}_LM)$ existiert ein a in A, so daß $x_i e = x_i a$ für $i = 1, \ldots, n$. Ein entsprechender Satz gilt für $Hom_L({}_LM, {}_LN)$.

Satz III, 3([1], Kap. II, § 4, Theorem 2): Seien ${}_LM$, ${}_LN$ Vektorräume über L, sei A ein dichter Ring von Endomorphismen von ${}_LN$, und B eine additive Gruppe von Homomorphismen von ${}_LM$ in ${}_LN$, so daß $BA \subseteq B$ und aus $xB = 0$ folgt, daß $x = 0$ ist, dann ist B dicht in $Hom_L({}_LM, {}_LN)$, d. h. zu jeder endlichen Teilmenge x_i, $i = 1, \ldots, n$, aus M und jedem h aus $Hom_L({}_LM, {}_LN)$ existiert ein b in B, so daß $x_i h = x_i b$ für $i = 1, \ldots, n$.

IV. Ranggleichungen

In diesem und in dem folgenden Kapitel bezeichne $EHom_L({}_LM, {}_LN)$ den Teilmodul derjenigen Homomorphismen f aus $Hom_L({}_LM, {}_LN)$, deren Bildmodul (M)f endlichen Rang über L hat. Ferner bedeute $eHom_L({}_LM, {}_LN)$ den Teilmodul derjenigen Homomorphismen f aus $Hom_L({}_LM, {}_LN)$, deren wesentlicher Definitionsbereich, d.h. M\Kern f, d.h. das Komplement des Kerns, endlichen Rang über L hat. Es gilt

$$eHom_L({}_LM, {}_LN) \subseteq EHom_L({}_LM, {}_LN) \subseteq Hom_L({}_LM, {}_LN) .$$

Die Beschreibung von Körpererweiterungen durch Endomorphismen führt auf die Frage, wie sich der Rang einer Körpererweiterung durch den Rang von Endomorphismen ausdrücken läßt. Die Formel $(K:L)_l = (End_L({}_LK) : K_r)_r$ genau dann, wenn $(K:L)_l$ endlich ist, liefert eine solche Beziehung. Der folgende Hilfssatz verallgemeinert und präzisiert diese Aussage: durch den Übergang von End zu Hom, von Hom zu eHom, und durch den Übergang von einer Körpererweiterung zu einem Doppelmodul.

Hilfssatz IV, 1: Für Moduln $M = {}_LM$ und $N = {}_LN_E$ über Körper L und E gilt die Ranggleichung

$$\dim_L({}_LM) \cdot \dim_E({}_EN) = (eHom_L({}_LM, {}_LN_E) : E_r)_r .$$

Beweis: Sei $M = \bigoplus_{i\in I} La_i$ und $N = \bigoplus_{k\in K} b_kE$. Für jedes Paar (i, k) aus I x K werde ein L-Homomorphismus f_{ik} wie folgt definiert: $a_jf_{ik} = b_k$ für j = i, und $a_jf_{ik} = 0$ für $j \neq i$. Offenbar liegt f_{ik} in $eHom_L({}_LM, {}_LN)$. Es ist zu zeigen, daß $eHom_L({}_LM, {}_LN) = \sum_{i\in I, k\in K} f_{ik}E_r$. Sei f aus $eHom_L({}_LM, {}_LN)$. Es existieren nur endlich viele a_i, für die $a_if \neq 0$ ist. Für jedes solche a_i gibt es g_{ik} in E_r, so daß $a_if = \sum_{k\in K} b_kg_{ik}$, und das ist gleich $a_i \sum_{k\in K} f_{ik}g_{ik} = a_i \sum_{j\in I, k\in K} f_{jk}g_{jk}$, wobei die Summe nur endlich viele von Null verschiedene Glieder hat. Also läßt sich f darstellen als $\sum_{j\in I, k\in K} f_{jk}g_{jk}$. Andererseits sind die f_{ik} linear unabhängig über E_r. Denn angenommen $\sum_{j\in I, k\in K} f_{jk}g_{jk} = 0$ für irgendwelche g_{jk} aus E_r, dann folgt $0 = a_i(\sum_{j,k} f_{jk}g_{jk}) = b_kg_{jk}$, also $g_{jk} = 0$.

Folgerung: Seien $M = {}_LK$ und $N = {}_LE_E$ Körpererweiterungen, so gilt

$\dim_L({}_LK) = (\mathrm{eHom}_L({}_LK, {}_LE) : E_r)_r$, speziell für K = E folgt $\dim_L({}_LK) = (\mathrm{eEnd}_L({}_LK) : K_r)_r$. Ist ferner $M = N = {}_LK_L$, so ist $\dim_L({}_LK)$. $\dim_L(K_L) = (\mathrm{eEnd}_L({}_LK):L_r)_r$.

Bemerkung: Genau dann ist $\dim_L({}_LM)$ endlich, wenn $\mathrm{eEnd}_L({}_LM) = \mathrm{EEnd}_L({}_LM) = \mathrm{End}_L({}_LM)$ ist. Ist $\dim_L({}_LM)$ unendlich, so gilt $\mathrm{eEnd}_L({}_LM) \subset \mathrm{EEnd}_L({}_LM) \subset \mathrm{End}_L({}_LM)$.

Beweis: Der Endomorphismus f, der alle a_i, i aus I, auf ein festes $m \neq 0$ abbildet, liegt zwar in $\mathrm{EEnd}_L({}_LM)$, aber nicht in $\mathrm{eEnd}_L({}_LM)$, wenn $\dim_L({}_LM)$ endlich ist.

Mitunter weiß man von einem Teilmodul von $\mathrm{Hom}_L({}_LM, {}_LN_E)$ nur, daß er dicht ist in $\mathrm{Hom}_L({}_LM, {}_LN_E)$. Das genügt schon für die Bestimmung seines Ranges über E_r, wenn $\dim_L({}_LM)$ höchstens abzählbar unendlich ist. Das ist die Aussage b) des folgenden Hilfssatzes.

Hilfssatz IV, 2: Sei G eine dichte Teilmenge von $\mathrm{Hom}_L({}_LM, {}_LN_E)$.

a) Wenn man unendliche Kardinalzahlen gleichsetzt,
gilt $\dim_L({}_LM)$. $\dim_E(N_E) = (G:E_r)_r$.

Im strengen Kardinalzahlsinn gilt, wenn $G \subseteq \mathrm{eHom}_L({}_LM, {}_LN_E)$

b) $\mathrm{Min}(\aleph_0, \dim_L({}_LM))$. $\dim_E(N_E) \leq (G:E_r)_r$,

c) $\dim_L({}_LM)$. $\dim_E(N_E) = (G:E_r)_r$ unter der Voraussetzung
$\dim_L({}_LM) \leq \aleph_0$

Beweis: Die Bezeichnung sei wie in Hilfssatz 1 . Sei $S = 1, 2, \ldots, n$ eine endliche Teilmenge von I . Da G in $\mathrm{eHom}_L({}_LM, {}_LN)$ dicht ist, existiert zu jedem Paar (i, k) aus I x K ein g_{ik} in G, so daß $a_j g_{ik} = a_j f_{ik}$ für alle j aus S. Die Elemente g_{sk}, s in S, k in K, sind über E_r linear unabhängig. Denn angenommen

$$\sum_{s \in S,\, k \in K} g_{sk} e_{sk} = 0 \qquad \text{mit } e_{sk} \text{ aus } E_r \ ;$$

für alle j aus S ist dann

$$0 = a_j \sum_{s,k} g_{sk} e_{sk} = \sum_{s,k} a_j f_{sk} e_{sk} = \sum_k b_k e_{jk} \ ,$$

also $e_{jk} = 0$ wegen der Basiseigenschaft der b_k . Dies besagt aber $(G:E_r)_r \geq n$. $\dim_E(N_E)$. Da die natürliche Zahl n beliebig angenommen war, folgen daraus die Behauptungen a) und b) . Ist $\dim_L({}_LM)$ höchstens abzählbar unendlich, so ist $\mathrm{Min}(\aleph_0, \dim_L({}_LM)) = \dim_L({}_LM)$.

Aus Hilfssatz 1 und Aussage b) folgt dann

$$\dim_L({}_LM).\dim_E(N_E) = (e\mathrm{Hom}_L({}_LM, {}_LN_E) : E_r)_r \geqslant$$

$$(G:E_r)_r \geqslant \dim_L({}_LM).\dim_E(N_E)$$

und daraus Aussage c) .

Folgerung: Sind $M = {}_LK$ und $N = {}_LE_E$ Körpererweiterungen von L, und G eine dichte Teilmenge von $\mathrm{Hom}_L({}_LK, {}_LE_E)$, so gilt ohne Unterscheidung unendlicher Kardinalzahlen

$$\dim_L({}_LK) = (G:E_r)_r \ .$$

V. Antiisomorphismen des Zwischenkörperverbandes einer Körpererweiterung

Die Grundlage der galoisschen Theorie der Körper bildet der Satz ([1], Kap. VII, § 2, Theorem 1), der einen Galoiszusammenhang, d.h. einen Antiisomorphismus σ des Verbandes $\{E\}$ aller Zwischenkörper $L \subseteq E \subseteq K$ einer Körpererweiterung K über L mit einem Verband $\{R\}$ gewisser Endomorphismenringe $K_r \subseteq R \subseteq End_L({}_LK)$ liefert. Jedoch nur unter der Voraussetzung der Endlichkeit von $\dim_L({}_LK)$ bleibt der Rang $(K:E)_l$ unter σ invariant, d.h. $(K:E)_l = (E\sigma:K)_r = (End_E({}_EK) : K_r)_r$. Im Blick auf die dritte in der Einleitung gestellten Frage ist es von Interesse, einen Antiisomorphismus anzugeben, der die Rangbeziehung auch für unendliche Kardinalzahlen invariant läßt. Dies gelingt durch eine Verschärfung des obengenannten Satzes, die es ermöglicht, $\{E\}$ antiisomorph auf bestimmte Teilringe R von EEnd oder eEnd abzubilden.

Satz V,1 : Der Endomorphismenring $End_L({}_LK)$ einer Körpererweiterung K über L sei mit der endlichen Topologie versehen. Dann besteht ein Antiisomorphismus des Verbandes $\{E\}$ aller Zwischenkörper $L \subseteq E \subseteq K$ mit dem Verband $\{R\}$ aller Teilringe R von $\mathfrak{E} = End_L({}_LK)$ (bzw. von $\mathfrak{E} = EEnd_L({}_LK)$, bzw. von $\mathfrak{E} = eEnd_L({}_LK)$) mit den Eigenschaften:

a) R ist abgeschlossen in $\mathfrak{E}$,

b) R ist K_r-Untermodul von $\mathfrak{E}_{K_r}$,

c) K_R ist treuer (faithful) R-Modul .

Er wird gegeben durch die Zuordnung $R \to V_{End(K)}(R)$ von $\{R\}$ auf den zu $\{E\}$ isomorphen Verband $\{E_1\}$. Die inverse Abbildung ist $E_1 \to V_{\mathfrak{E}}(E_1)$.

Beweis: Wir müssen die beiden Gleichungen $V_{\mathfrak{E}} V_{End(K)}(R) = R$ und $V_{End(K)} V_{\mathfrak{E}}(E_1) = E_1$ beweisen. Der Operator V kehrt die durch $\subseteq$ gegebene Ordnung um, d.h. aus $L_1 \subseteq L_2$ folgt $V(L_{21}) \subseteq V(L_{11})$ und umgekehrt. Diese Bemerkung und die behaupteten Gleichungen würden die Verbandsantiisomorphismen beweisen.

Behauptung: $V_{\mathfrak{E}} V_{End(K)}(R) = R$.

Wir weisen zunächst nach, daß die Endomorphismen, die mit allen r aus R vertauschbar sind, in K_1 liegen. Sei e ein Element aus End(K), das die Gleichung re = er für alle r aus R erfüllt. Da R nach b) ein K_r-Modul ist, gilt auch $rk_r e = erk_r$ für alle k_r aus K_r. Sei $r \neq 0$ und x ein Element aus K, für das $xr \neq 0$ ist, dann gilt $x(rk_r e) = x(erk_r)$, $((xr)k)e = (xe)rk$, oder, als Abbildung von k aufgefaßt, $k(xr)_1 e = k((xe)r)_1$ für alle k aus K, also $(xr)_1 e = ((xe)r)_1$, $e = (xr)_1^{-1}((xe)r)_1 = (xe)r(xr)^{-1})_1$. Der Körper $V_{End(K)}(R)$ werde mit E_1 bezeichnet. Nun ist K_R als R-Modul irreduzibel. Denn aus c) folgt für jedes k aus K : es existiert ein r in R, so daß $kr \neq 0$ ist; da R nach b) ein K_r-Rechtsmodul ist, folgt $K = (kr)K_r \subseteq kR \subseteq K$. Aus dem Dichtheitssatz III, 2 für irreduzible Moduln folgt, daß R dicht in $End_E({}_E K) = V_{\mathfrak{E}}(E_1)$ ist. Da R nach a) in $\mathfrak{E}$ abgeschlossen ist, gilt $R = V_{\mathfrak{E}}(E_1)$, also $V_{\mathfrak{E}} V_{End(K)}(R) = R$.

Behauptung: $V_{End(K)} V_{\mathfrak{E}}(E_1) = E_1$.

Der Ring $V_{\mathfrak{E}}(E_1)$ hat die Eigenschaften a), b) und c) . Wie eben gezeigt wurde, liegt also ein Element, das mit allen Elementen aus $V_{\mathfrak{E}}(E_1)$ vertauschbar ist, in K_1 . Es ist noch nachzuweisen, daß es in E_1 liegt. Zu jedem k aus K, das nicht in E liegt, gibt es ein r in $V_{\mathfrak{E}}(E_1)$, das k auf $k' \neq k(1r)$ abbildet, z. B. ein r mit $1r = 1$ und $kr = 0$. Dann ist $1(k_1 r) = kr \neq k(1r) = (1r)k_1$, also liegt k_1 nicht in $VV_{\mathfrak{E}}(E_1)$.

Folgerung 1 : Der Antiisomorphismus $\mathfrak{G}$ des Verbandes der Zwischenkörper $\{E\}$ einer Körpererweiterung K über L zu dem Verband $\{R\}$ der Teilringe von $eEnd_L({}_L K)$ mit den Eigenschaften a), b) und c) des letzten Satzes läßt den Rang $(K:E)_1$ invariant, d. h. $(K:E)_1 = (E\mathfrak{G}:K_r)_r = (eEnd_E({}_E K) : K_r)$. (Folgerung Hilfssatz IV, 1)

Folgerung 2 : Ein Teilring R des Endomorphismenringes $\mathfrak{E} = End_L({}_L K)$ einer Körpererweiterung K über L, der die Eigenschaften a), b) und c) des letzten Satzes besitzt, enthält das Einselement.

Beweis: R läßt sich in der Form $R = V_{\mathfrak{E}} V_{End(K)}(R)$ darstellen.

VI. Quasigaloissche Körpererweiterungen

Im Mittelpunkt der folgenden Betrachtungen steht eine Halbgruppe H, enthalten in dem Ring $G = \mathrm{End}_L({}_L K_L)$ einer Körpererweiterung K über L. Bevor wir zu dem Hauptresultat (Satz VI, 6) kommen, beweisen wir zwei Abschätzungen von $\dim_L({}_L K)$. Dabei wird K über L noch nicht als quasigaloissch vorausgesetzt, sondern lediglich verlangt, daß L Linksfixkörper von H ist.

Bemerkung 1 : Ist L Linksfixkörper von $H \subseteq G = \mathrm{End}_L({}_L K)$, so ist L auch Linksfixkörper von G . Entsprechendes gilt über Rechtsfixkörper. Ist also K über L quasigaloissch mit einer Halbgruppe H, so ist K über L auch quasigaloissch bezüglich des vollen Ringes G.

Beweis: $L_l \subseteq V_{K_l}(G) \subseteq V_{K_l}(H) = L_l$ und

$L_r \subseteq V_{K_r}(G) \subseteq V_{K_r}(H) = L_r$.

Die Halbgruppe H erzeugt mit K_r einen Ring R, der in $\mathrm{End}_L({}_L K)$ enthalten ist. Er ist Vereinigung der Moduln HK_r, $(HK_r)(HK_r) = (HK_r)^2, \ldots, (HK_r)^n$, wenn n alle natürlichen Zahlen durchläuft. Enthält H die identische Abbildung, so gilt $(HK_r)^m \subseteq (HK_r)^n$ für $m \leq n$.

Definition: Sei $H \subseteq \mathrm{End}(K)$ eine Halbgruppe mit 1. Die kleinste natürliche Zahl v, für die der durch H und K_r erzeugte Ring gleich $(HK_r)^v$ ist, werde mit $v(K_r, H) = v$ bezeichnet und Vertauschungsindex von H und K_r genannt. Existiert sie nicht, so setzen wir $v = \aleph_0$.

Für das Folgende führen wir abkürzende Bezeichnungen ein für $(H{:}K_r)_r = a_r$, $(H{:}K_l)_r = a_l$, $\dim_L({}_L K) = n_l$, $\dim_L(K_L) = n_r$, $v(K_r, H) = v$.

Satz VI, 1: Sei K über L eine Körpererweiterung, H eine Halbgruppe mit 1, enthalten in $G = \mathrm{End}_L({}_L K_L)$, und sei L ihr Linksfixkörper. Dann gilt für den durch H und K_r erzeugten Ring R die Abschätzung

$\dim_L({}_L K) = (R{:}K_r)_r \leq a_r (n_r a_r)^{v-1}$,

ohne Unterscheidung unendlicher Kardinalzahlen.

Beweis: Da 1 in H liegt, ist $K_r \subseteq R$, also K_R ein einfacher R-Modul. Da $K_r \subseteq R$, ist $V_{\mathrm{End}(K)}(R) = V_{K_l}(R) = L_l$, denn L ist Linksfixkörper von

H . Nach dem Dichtheitssatz III, 2 ist R dicht in $End_L({}_LK)$. Dann ist $(R:K_r)_r = \dim_L({}_LK)$ nach der Folgerung von Hilfssatz IV, 2 . Nach Definition ist

$$(H:K_r)_r = a_r \text{ und } (K_r:L_r) = n_r, \text{ also } (HK_r:L_r)_r = a_r n_r .$$

Für jede natürliche Zahl n gilt wegen $v(L_r, H) = 1$ die Abschätzung

$$((HK_r)^n : L_r)_r \leq (a_r n_r)^n ,$$

also auch für n = v, d. h.

$$((HK_r)^n : L_r)_r = (R:L_r)_r \leq (a_r n_r)^v$$

oder, da die linke Seite gleich $(R:K_r)(K_r:L_r)_r$ ist,

$$(R:K_r)_r \leq a_r (a_r n_r)^{v-1} .$$

Hilfssatz VI, 2: Ist H eine Halbgruppe $\subseteq End_L({}_LK_L)$, so gilt $a_r \leq n_l$ und $a_l \leq n_r$ ohne Unterscheidung unendlicher Kardinalzahlen. Unter der Voraussetzung

a) die Gruppe der inneren Automorphismen I von K über L ist in H enthalten, oder

b) $(T:Z)_r$ ist endlich, wobei $T = V_K(L)$ und $Z = V_K(K)$,

gilt $a_r = a_l$.

Beweis: $a_l = (H:K_l)_r \leq (End_L(K_L) : K_l)_r = n_r$. Analog folgt $a_r \leq n_l$. Nach der Folgerung des Lemmas aus Kapitel II gilt $(H:K_r)_r = (H:T_r)_r$ und $(H:K_l)_r = (H:T_l)_r$. Sei (T:Z) endlich, dann ist $(H:Z)_r =$ $= (H:T_l)_r (T_l:Z_l)_r = (H:T_r)_r (T_r:Z_r)_r$, und wegen $Z_r = Z_l$ und (T:Z) = $= (T_r:Z_r)_r = (T_l:Z_l)_r$ folgt die Behauptung.

Sei jetzt (T:Z) unendlich und $I \subseteq H$, dann gilt

$$(H:K_r)_r \geq (I:K_r)_r = (T_l:K_r)_r = (T_l:Z_r)_r = (T:Z),$$

nach dem Lemma aus Kapitel II. Also ist a_r unendlich. Analog folgt, daß a_l unendlich ist.

Bemerkung 2: Ist L Linksfixkörper der Halbgruppe H, so ist L nach Bemerkung 1 auch Linksfixkörper der durch H und I erzeugten Halbgruppe, die die Voraussetzung a) erfüllt. Voraussetzung b) ist stets erfüllt, wenn $\dim_L({}_LK)$ oder $\dim_L(K_L)$ endlich ist, da

$$(K:L)_r \geq (T:Z)_l = (T:Z)_r \leq (K:L)_l$$

(Folgerung von Satz VII, 1) .

Aus dem letzten Satz und dem letzten Hilfssatz ergibt sich als Folgerung

Satz VI, 3: Sei K über L eine Körpererweiterung, H eine Halbgruppe mit 1, enthalten in $G = End_L({}_LK_L)$, und sei L ihr Linksfixkörper.

a) Ist $a_r \leq n_r$, so gilt
   1) $n_l \leq n_r$, wenn n_r unendlich ist,
   2) n_l höchstens abzählbar unendlich, wenn n_r endlich ist.

b) Ist n_r endlich und v endlich, dann ist auch n_l endlich.

c) Ist $v = 1$, so ist $n_l \leq n_r$.

Beweis: a) ergibt sich unmittelbar aus Satz 1. Zu b):
Wegen Bemerkung 1 kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß H die Menge I aller L-Monomorphismen von K enthält. Dann gilt nach Hilfssatz 2, daß $a_r = a_l \leq n_r$, also nach Satz 1, daß n_l endlich ist. Zu c): Ist s aus I, so ist $k_r s = s(ks)_r$ für jedes k aus K, also $v(K_r, I) = 1$. Daher und wegen Bemerkung 1 kann man $I \subseteq H$ voraussetzen. Nach Hilfssatz 2 ist dann $a_r = a_l \leq n_r$, nach Satz 1 wegen $v = 1$ ist $n_l \leq a_r$, also $n_l \leq n_r$.

Hilfssatz VI, 4: Sei H eine Halbgruppe $\subseteq G = End_L({}_LK_L)$. Aus $K_rH \subseteq HK_r$, d. h. HK_r ist Ring, folgt $K_lH \subseteq GK_l$.

Beweis: Sei $h_i, i \in I$, eine Basis von HK_r über K_r . Nach Hilfssatz II, 1 gilt für $HK_r = M = {}_{K_r}M_{K_r}$ für alle y aus K und alle h aus H für bestimmte e_i aus G die Gleichung $y_r h = \sum_i h_i (ye_i)_r$. Anwendung des Endomorphismus $y_r h$ auf x aus K ergibt

$$x(y_r h) = (xy)h = \sum_i (xh_i)(ye_i)_r = yx_l h = y \sum_i e_i (xh_i)_l,$$

d. h. $x_l h = \sum_i e_i (xh_i)_l$ für alle x aus K, und h aus H .
Also $K_lH \subseteq GK_l$.

Hilfssatz VI, 5: Sei H eine Halbgruppe $\subseteq G = End_L({}_LK_L)$, und sei L Linksfixkörper von H . Gilt $\dim_L({}_LK)$ endlich und ist HK_r Ring, so folgt GK_r ist Ring.

Beweis: Der Ring HK_r ist dicht in $End_L({}_LK)$, andererseits diskret wegen der Endlichkeit von $\dim_L({}_LK)$ (Hilfssatz III, 1, 4)). Also ist $End_L({}_LK) = HK_r$ und $K_rG \subseteq End_L({}_LK) = HK_r \subseteq GK_r$.

Folgerung: Sei $\dim_L({}_LK)$ endlich, sei L Linksfixkörper von $H \subseteq G = End_L({}_LK_L)$ und HK_r ein Ring, so ist GK_l ein Ring.

Satz VI, 6: Ist K über L eine quasigaloissche Körpererweiterung mit der Halbgruppe H und HK_r ein Ring, so gilt $\dim_L({}_LK) = \dim_L(K_L)$ ohne Unterscheidung unendlicher Kardinalzahlen.

Beweis: Daß HK_r Ring ist, bedeutet $v(K_r, H) = 1$. Dann ist nach Satz 3c) $n_l \leq n_r$. Ist n_l unendlich, so ist also n_r unendlich. Andernfalls gilt nach der letzten Folgerung $v(K_l, G) = 1$, und wegen der Links-Rechts-Symmetrie von Satz 3 folgt $n_r \leq n_l$.

VII. Isomorphe Einbettungen

Man kann die in dem letzten Kapitel angewandten Methoden dadurch verallgemeinern, daß man Körpererweiterungen K über L statt mit L_l-Endomorphismenringen von K mit Moduln von L_l-Homomorphismen von K in eine Körpererweiterung E über L vergleicht. Insbesondere ist in dieser Betrachtungsweise der Fall enthalten, daß K in E isomorph eingebettet, d.h. $K \subseteq E$ ist.

Satz VII, 1: Sei G die Menge der L-Monomorphismen einer Körpererweiterung K über L in eine Körpererweiterung E über L. Sei s_i, i aus I, ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen nach der Relation von Satz II, 2 . Dann gilt

$$\dim_L({}_LK) \geq \sum_{i \in I} (V_E(L) : V_E(Ks_i))_r$$

ohne Unterscheidung unendlicher Kardinalzahlen.

Beweis: Nach der Folgerung von Hilfssatz IV, 1 gilt ohne Unterscheidung unendlicher Kardinalzahlen

$\dim_L({}_LK) = (\mathrm{Hom}_L({}_LK, {}_LE) : E_r)_r \geq (G:E_r)_r$. Daraus und aus Satz II, 2 folgt die Behauptung.

Folgerung: Sei $L \subseteq K \subseteq E$, so gilt

$$\dim_L({}_LK) = (K:L)_l \geq (V_E(L) : V_E(K))_r ,$$

speziell für K = E gilt

$$\dim_L({}_LK) = (K:L)_l \geq (V_K(L) : V_K(K))_r .$$

Satz VII, 2: K und E seien Körpererweiterungen von L. Sei E quasigaloissch über L mit der Halbgruppe G, so daß $E_r G \subseteq GE_r$ ist. Der Teilmodul $H = \mathrm{Hom}_L({}_LK_L, {}_LE_L)$ von Hom(K, E) habe die Eigenschaft, daß für ein Element x aus K aus xH = 0 folgt x = 0 .

a) Dann ist HE_r dicht in $\mathrm{Hom}_L({}_LK, {}_LE)$, und HE_l dicht in $\mathrm{Hom}_L(K_L, E_L)$.

b) Unter der Voraussetzung, $(V_E(L) : V_E(E))_r$ endlich, gilt $\dim_L({}_LK) = \dim_L(K_L)$ ohne Unterscheidung unendlicher Kardinalzahlen.

Beweis: Es werde gesetzt: $B = HE_r$ und $A = GE_r$. Dann gilt

$BA = HE_r GE_r \subseteq HGE_r \subseteq HE_r = B$. Nach Satz III, 3 folgt daraus, daß HE_r dicht in $\mathrm{Hom}_L({}_LK, {}_LE)$ ist. Analog zeigt man unter Beachtung von Hilfssatz VI, 4 die Dichtheit von HE_l in $\mathrm{Hom}_L(K_L, E_L)$. Nach der Folgerung von Hilfssatz IV, 2 ist dann $(HE_l : E_l) = \dim_L(K_L)$ und $(HE_r : E_r) = \dim_L({}_LK)$. Wie im Hilfssatz VI, 2 folgt daraus die Behauptung.

Folgerung: Sei E über L eine quasigaloissche Erweiterung mit einer Halbgruppe G und $E_r G \subseteq GE_r$, sei ferner $(V_E(L) : V_E(E))$ endlich, so gilt für jeden Zwischenkörper K, d.h. $L \subseteq K \subseteq E$, die Gleichheit $\dim_L({}_LK) = \dim_L(K_L)$ ohne Unterscheidung unendlicher Kardinalzahlen.

VIII. Anwendungen und Beispiele

1) Ist H eine Halbgruppe von Monomorphismen eines Körpers K, so sind HK_r und HK_l Ringe, denn (xy)h = (xh)(yh) besagt $x_l h = h(xh)_l$ und $y_r h = h(yh)_r$, x und y aus K, und h aus H. Ferner gilt, wenn $L_l = V_{K_l}(H)$ definiert wird, $L_r = V_{K_r}(H)$, denn aus $hx_l = x_l h = h(xh)_l$ folgt x = xh und daraus $x_r h = hx_r$. Also ist K über L quasigaloissch mit der Halbgruppe H. Nach Satz VI, 6 ist $\dim_L({}_L K) = \dim_L(K_L)$, wenn unendliche Kardinalzahlen gleichgesetzt werden.

2) Sei H eine Halbgruppe $\subseteq$ End(K), die von 1 und einer Menge von Ableitungen erzeugt wird. Ein Endomorphismus d heißt Ableitung, wenn (xy)d = (xd)y + x(yd), d.h.

$$x_l d = (xd)_l + dx_l \quad , \quad y_r d = dy_r + (yd)_r \quad .$$

HK_r und HK_l sind also Ringe. Sei h aus H, $h = d_1 d_2 \ldots d_s$ mit Ableitungen $d_1, \ldots, d_s$. Es gelte $k_r h = hk_r$ für alle h aus H und ein bestimmtes k aus K. Dann ist $k_r d_i = d_i k_r$ für i = 1, ..., s und $kd_i = 0$ wegen $y_r d = dy_r + (yd)_r$. Aus $x_l d = (xd)_l + dx_l$ folgt dann $k_l d_i = d_i k_l = hk_l$. H hat also den Fixkörper L und ist quasigaloissch. Nach Satz VI, 6 gilt also $\dim_L({}_L K) = \dim_L(K_L)$ ohne Unterscheidung unendlicher Kardinalzahlen.

3) Versteht man unter einer (s,t)-Ableitung eine Abbildung der Form (xy)d = (xd)(ys) + (xt)(yd), (x+y)d = xd + yd, s, t Monomorphismen, so ist jeder Monomorphismus s eine (s,0)-Ableitung und jede Ableitung eine (1,1)-Ableitung. Sei H eine Halbgruppe, die von einer Menge M von (s,t)-Ableitungen von K erzeugt wird, 1, s, t in M . Wie in den Beispielen 1) und 2) zeigt sich : HK_r und HK_l sind Ringe, und H besitzt den Fixkörper L. Also ist $\dim_L({}_L K) = \dim_L(K_L)$ bei Gleichsetzung unendlicher Kardinalzahlen.

4) Eine quasigaloissche Körpererweiterung vom Linksrang 2 hat auch den Rechtsrang 2 .

Beweis: Sei H eine zu K über L gehörige Halbgruppe. Für den durch H und K_r erzeugten Ring R gilt nach Satz VI, 1 $(R:K_r) = 2$. Es gibt eine Basis von R über K_r aus 1 und einem Element h aus H, d.h.

$R = K_r \oplus hK_r$, also ist HK_r ein Ring. Nach Satz VI, 6 folgt daraus $\dim_L(K_L) = 2$.

---

1) Wir fassen Körper als den übergeordneten Begriff, dessen Spezialisierungen die kommutativen Körper und die nichtkommutativen Körper (Schiefkörper) sind.

2) Zahlen in eckigen Klammern [] verweisen auf das Literaturverzeichnis

Literatur

[1] N. Jacobson: Structure of Rings, Amer. Math. Soc. Coll. Public., Vol. 37, 1956

[2] N. Jacobson: The Theorie of Rings, Amer. Math. Soc., 1943

[3] N. Nobusawa: A note on Galois extensons of division rings, Math. J. Okay. Univ., Vol. 7, 1957

[4] T. Nagahara and H. Tominaga: Some Remarks on Galois extensions of Division Rings, Math. J. Okay. Univ., Vol. 9, 1960

[5] P. M. Cohn: Quadratic extensions of skew fields, Proc. London Math. Soc. (3) 11, 1961

[6] P. Dubreil: Algèbre, t. I, 2^{e} édition, Cahiers scientifiques, Gauthier-Villars, Paris 1954

Lebenslauf

Als Sohn des Ordentlichen Professors für Kirchengeschichte und christliche Archäologie an der Universität Kiel Professor Walter Elliger, zur Zeit Professor mit Lehrstuhl für Kirchengeschichte an der Universität Bochum, wurde ich am 13. Januar 1935 in Kiel geboren. Seit 1950 lebte unsere Familie in Kleinmachnow an der Grenze Berlins. Nach dem Abitur im Jahre 1954 am humanistischen Gymnasium zu Berlin-Steglitz studierte ich an der Freien Universität Berlin, anfangs Germanistik und Philosophie, dann zusätzlich Mathematik und schließlich Mathematik und Physik. Im Jahre 1961 schrieb ich die Erstfassung meiner Dissertation. Die verhängnisvolle Mauer des 13. August vereitelte den Abschluß meines Studiums. Ein Fluchtversuch im Dezember 1961 nach Westberlin mißlang. Ich wurde zu 18 Monaten Gefängnis verurteilt. Nach meiner Entlassung arbeitete ich als Hilfsarbeiter in einem Baubetrieb. Im Oktober 1963 gelang mir die Flucht in die Bundesrepublik bzw. nach Westberlin. Seit November 1963 arbeite ich am mathematischen Institut Heidelberg.

Sigurd Elliger